行列の固有値問題の一応用 (数値計算のアルゴリズム)

AUTHOR(S):

大内, 昭司

CITATION:

大内, 昭司. 行列の固有値問題の一応用 (数値計算のアルゴリズム). 数理解析研究所講究録 1976, 269: 133-138

ISSUE DATE:

1976-04

URL:

http://hdl.handle.net/2433/105893

数理解析研究所講究録
269巻 1976年 133-138

行列の固有値問題の一応用

防衛大 応物　　大内昭司

行列の固有値および固有ベクトルの数値計算は詳しく調べられているが、それを特殊関数の計算へ応用することが考えられる。次にその二三の例を示す。

(1) Bessel 関数

第一種 Bessel 関数 $J_n(x)$ の計算法に漸化式

$$J_{n-1}(x) - \frac{2n}{x} J_n(x) + J_{n+1}(x) = 0 \quad (n \geqq 1) \qquad (1)$$

を用いる方法がある。[1)2)] 適当な N について

$$J_N^* = \varepsilon , \quad J_{N+1}^* = 0 \quad \text{と置いて}$$

$$J_{n-1}^* = \frac{2n}{x} J_n^* - J_{n+1}^*$$

によって $J_{N-1}^*, J_{N-2}^*, \cdots, J_1^*, J_0^*$ を求めると

余り大きくない r に対しては

$$K = J_0^* + 2(J_2^* + J_4^* + \cdots) \quad \text{によって}$$

$$J_r(x) = \frac{1}{K} J_r^* \quad \text{となることによるのである。}$$

漸化式を順方向に使うと爆発的な不安定が生ずる。

漸化式 (1) は

$$
\begin{bmatrix}
\ddots & \ddots & \ddots & & & & \\
 & 1 & \frac{4}{x} & 1 & & & \\
 & & 1 & \frac{2}{x} & 1 & & \\
 & & & 1 & 0 & 1 & \\
 & & & & 1 & -\frac{2}{x} & 1 \\
 & & & & & 1 & -\frac{4}{x} & 1 \\
 & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix}
\vdots \\ J_{-2}(x) \\ J_{-1}(x) \\ J_0(x) \\ J_1(x) \\ J_2(x) \\ \vdots
\end{bmatrix}
= 0
$$

と書けるが　これは

$$\cdots,\ J_{-2}(x),\ J_{-1}(x),\ J_0(x),\ J_1(x),\ J_2(x),\ \cdots$$

が　対称三重対角行列の固有値 0 に対応する固有ベクトルの成分であることを意味する。この観点に立つと、上記の計算法は、対称三重対角行列の既知固有値に対する固有ベクトルを求めるときに、絶対値最大の成分に向って両側から逐次求めていくことにより不安定の発生を避ける計算法[3)]に当ることがわかる。

(2)　Mathieu 関数（整数次）

Mathieu 方程式

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + (a - 2q\cos 2x)\cdot z = 0 \qquad (2)$$

の周期解は　四種類の基本関数

$$ce_{2n}(x,q)\ ,\ se_{2n+1}(x,q)\ ,\ ce_{2n+1}(x,q)\ ,\ se_{2n+2}(x,q)$$

$$(n = 0, 1, 2, \cdots)$$

に分けられるが、特性値 a と、各関数の Fourier 係数は従来 連分数を用いて計算されている。[5)]

$ce_{2n+1}(x,q)$ を例にとれば

$$ce_{2n+1}(x,q) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{(2n+1)}(q)\cos(2r+1)x$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\left\{A_{2r+1}^{(2n+1)}\right\}^2 = 1$$

を (2) に代入して

$$(a_n - 1 - q)A_1^{(2n+1)} - qA_3^{(2n+1)} = 0 \qquad (3)$$

$$-qA_{2r-1}^{(2n+1)} + \left\{a_n - (2r+1)^2\right\}A_{2r+1}^{(2n+1)} - qA_{2r+3}^{(2n+1)} = 0 \qquad (4)$$

$$(r \geqq 0)$$

が得られるが、これは

$$v_{2r+1} = \frac{A_{2r+3}^{(2n+1)}}{A_{2r+1}^{(2n+1)}}$$ を使えば

$$v_{2r-1} = \frac{q}{a_n - (2r+1)^2 -}\ \frac{q^2}{a_n - (2r+3)^2 -}\cdots\ \cdots$$

$$\cdots\ \frac{q^2}{a_n - (2r+2p+1)^2 - q\,v_{2r+2p+1}}$$

となることを用いるのである。

(3), (4) 式は、また

$$\mathbb{T} = \begin{bmatrix} 1^2+q & q & & & \\ q & 3^2 & q & & \\ & q & 5^2 & q & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}, \quad \mathbb{u} = \begin{bmatrix} A_1^{(2n+1)} \\ A_3^{(2n+1)} \\ A_5^{(2n+1)} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

によって

$$\mathbb{T}\mathbb{u} = a_n \mathbb{u}$$

と書けるから、行列の固有値問題として扱える。

この場合も対称三重対角行列になっているので、例えば ~~Householder の~~ 二分法等がすぐに適用されるが、その際には、連分数法のように出発値としての a の近似値を必要としない。$\mathbb{u}$ が規格化した形で求められれば、その成分は（符号を除いて）A_r そのものである。

(3)　Mathieu 関数（非整数次）

一般 Mathieu 方程式の安定解はやはり四種の基本関数

$$ce_{2n+\beta}(x, q), \quad se_{2n+\beta}(x, q),$$

$$ce_{2n+1+\beta}(x, q), \quad se_{2n+1+\beta}(x, q) \qquad (0<\beta<1)$$

に分けられるが、これらの三角級数表示は

$$ce/se_{2n+\beta}(x,q) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_{2r}^{(2n+\beta)} \cos/\sin(2r+\beta)x$$

$$ce/se_{2n+1+\beta}(x,q) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_{2r+1}^{(2n+1+\beta)} \cos/\sin(2r+1+\beta)x$$

となる[6]。

この場合も 前節と同様に 対称三重対角行列の固有値問題に帰することができるが、$\beta \longrightarrow 0, 1$ の極限として整数次の場合をも含んでいる。
(Fourier 係数には 因数 $\sqrt{2}$ の差がある)
与えられた n, β, q に対して特性値 a を与える数表は現在未公刊であるが、この方法によれば 容易に算出される。

[附記]

集会において整数次 Mathieu 関数の特性値が行列の固有値を求める Weinstein - Bazley 法 の適用例となっていることが指摘された。[7) 8)] そこでは無限次行列を有限次で近似するときの精度が詳細に論じられている。

[参考文献]

1) G. N. Lance, Numerical Methods for High Speed Computers (Iliffe & Sons., London, 1960)

2) F. W. J. Olver, Handbook of Mathematical Functions, ch. IX (Dover Publications, New York, 1968)

3) J. H. Willkinson, The Algebraic Eigenvalue Problem (Clarendon Press, Oxford, 1965)

4) 6) N. W. McLachlan, Theory and Application of Mathieu Functions (Dover Publications, New York, 1964)

5) NBS Computation Laboratory, Tables Relating to Mathieu Functions: Characteristic Values, Coefficients, and Joining Factors (National Bureau of Standards, Washington, D.C., 1967)

7) A. Weinstein and W. Stegan, Intermediate Problems for Eigenvalues (Academic Press, New York, 1966)

8) T. Yamamoto, The Rayleigh-Ritz and Weinstein-Bazley Methods Applied to a Class of Ordinary Differential Eqations of the Second Order II, SIAM J. Numer. Anal. 12, 428-438 (1975)